
بسم الله الرحمن الرحیم

منطق شما را از A به B می برد و خیال، شما را به هر جایی می برد.

البرت انیشتین

گزاره ها

جملاتی هستند که خبری را بیان می کنند اما راست یا دروغ بودن آنها بستگی به زمان و مکان مطرح شدن آنها دارد. مثلاً جمله ای خبری مانند **"هوا سرد است"** بستگی به این دارد که کی و کجا گفته شود. بعلاوه، ما تعریف درستی از سرد بودن نداریم و لذا درستی این جمله نسبت به مکان ، زمان و تعریف ما از سرد بودن هوا نسبی است.

از طرفی دیگر جملاتی خبری وجود دارند که تعاریف به کار رفته در آنها کاملاً مشخص است ولی دانش ما در حدی نیست که بتوانیم درستی یا نادرستی آنها را تشخیص دهیم مثلاً این جمله خبری **که "در مریخ حیات وجود دارد "** به خودی خود درست یا نادرست است گرچه دانش کنونی ما پاسخ دقیقی به درستی یا نادرستی آن نمی دهد.

قسمت جالب تر بحث مربوط به جملاتی است که تعاریف به کار رفته در آنها کاملا مشخص است و دانش ما در تعیین درستی یا نادرستی آنها کافی است اما خود جمله ذاتاً دارای این مشکل است که می تواند **هم درست و هم نادرست یا نه درست و نه نادرست باشد**. ممکن است این امر به نظر عجیب بیاید اما به جمله زیر توجه کنید:

جمله ای که در حال نوشتن آن هستم دروغ است.

واضح است که مشکلی در تعبیر راست و دروغ بودن این جمله نداریم و درستی آن وابسته به زمان و مکان نیست اما با این حال نمی توان آن را راست دانست چون اگر راست دروغ بودن خود را نتیجه خواهد داد و بعلاوه نمی توان آن را دروغ دانست چون دروغ بودن آن راست بودنش را نتیجه می دهد.

تعریف: گزاره ، جمله ای خبری است که یا درست باشد یا نادرست(ولی نه هردو)، هر چند درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

توجه کنید که در ارائه ی یک تعریف نباید چیزی کم ویا زیاد باشد و به علاوه نباید تعریف در خود تناقض داشته باشد. به عبارت دیگر یک تعریف باید **جامع و مانع** باشد.

درست(راست) یا نادرست(دروغ) بودن یک گزاره مسلماً وابسته به قراردادهایی از پیش تعیین شده و مفاهیمی از پیش تعریف شده می باشد. مثلاً عبارت " دو به اضافه ی دو برابر چهار است"، گزاره ای درست است بدین دلیل که عدد دو را می شناسیم، مفهوم جمع برای ما تعریف شده است و برابری برای ما معنی دارد.

تعریف: فرض می کنیم pیک گزاره باشد. درست یا نادرست بودن p را ارزش درستی گزاره ی p می نامیم و با $v(p)$ نمایش می دهیم. اگر p درست باشد می گوییم ارزش درستی آن درست است و می نویسیم $v(p) = 1$ در غیر این صورت می گوییم ارزش درستی p نادرست است و می نویسیم: $v(p) = 0$.

مثال: فرض کنیم pعبارت "در حال حاضر، در جهان دو نفر وجود دارند که تعداد موهای سرشان مساوی است" باشد در این صورت گرچه ما فعلاً نمی دانیم که آیا واقعاً این جمله درست است یا نه ولی به هر حال ارزش درستی این گزاره صفر یا ۱ است.

البته واقعاً می دانیم که این گزاره درست است. کافی است دونفره با صفر مو را در نظر بگیریم.

تعریف: عبارتی شامل یک یا چند متغیر که با تبدیل یکنواخت متغیر ها به اسامی خاص ، عبارت تبدیل به یک گزاره شود گزاره نما نامیده می شود و گزاره ی حاصل را یک نمونه از آن گزاره نما می نامیم.

مثال: فرض کنیم $p(x)$ عبارت " xشاعر است" باشد در این صورت $p(x)$ گزاره نمایی می باشد "حافظ شاعر است" و "شاملو شاعر است" نمونه های از آن است.

تذکر:

اگر Fخاصیت زوج بودن باشد آنگاه $\forall x\ F(x)$یعنی هر عددی زوج است و $\exists x\ F(x)$ یعنی عددی وجود دارد که زوج است. توجه کنید که نوشتن عبارات $\forall x; F(x)$یا $\exists x; F(x)$کاملاً بی مفهوم است و همانطور که در نگارش زبان معمولی علامات . ، ; و : را سخاوتمندانه در بین جملات خود هدر نمی دهیم در ریاضیات نیز حق نداریم هر علامتی را در هر جایی استفاده کنیم.

رابط های گزاره ای

تعریف: فرض کنیم p گزاره ای دلخواه باشد نقیض گزاره ی p با علامت $\sim p$ یا $\neg p$ نمایش داده می شود. رابط $\sim$ را رابط نفی می نامیم.

تعریف: به کلمه یا کلماتی که یک یا دو گزاره ی ساده یا مرکب را به یک گزاره ی جدید تبدیل می کنند رابط می گوییم.

از این رو اغلب ترجیح می دهیم که $\sim p$را به صورت " چنین نیست که" بیان کنیم. توجه کنید که این بیان برای نقیض یک گزاره، ساده ترین روش است که به اطلاعات قبلی ما در باغ عالم سخن مورد بحث کاری ندارد. مثلاً ممکن است تصور شود که نقیض گزاره ی "اکنون شب است" این باشد که "اکنون روز است " اما این به هیچ وجه با تعریف ما سازگار نیست چرا که در حقیقت در این دیدگاه از نقیض گزاره، ما به نوعی دانش خود در مورد روز و شب را به عنوان دو مفهوم متضاد هم دخیل کرده ایم. بعلاوه نقیض شب بودن را نمی توان روز بودن دانست، چرا که ممکن است اکنون نه شب باشد و نه روز. بهترین و ساده ترین راه برای بیان نقیض گزاره ی اکنون شب است این است که بگوییم چنین نیست که اکنون شب است یا به طور معادل بگوییم که اکنون شب نیست اما این روش اخیر برای بیان نقیض محتاج نوعی نگاه موشکافانه است چون معمولاً جملات به سادگی توسط نفی کردن فعل نقیض نمی شوند. مثلاً روشن است که نقیض گزاره ی "هر انسانی کوشا است" گزاره ی "هر انسانی کوشا نیست"

نمی باشد. نباید بیان نقیض یک گزاره به نوع خواندن آن مربوط باشد. قابل توجه این است که در زبان علمی، واضح نویسی بسیار مهم است نباید آن را فدای زیبانویسی کرد که در ادبیات، ایهام در کلام زیبا و هنر محسوب می شود اما در ریاضیات آنچه زیبا و معقول است درست نویسی می باشد.

انتفای مقدم

مثال: فرض کنید گزاره ی p "باران می آید" و q گزاره ی "زمین خیس می شود" باشد. ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ را می توان به صورت" اگر باران بیاید آنگاه زمین خیس می شود" بیان کرد در حالتی که باران بیاید و زمین خیس شود، ارزش گزاره ی مرکب درست است و بحثی در کار نیست. همچنین در حالتی که باران بیاید و زمین خیس نشود یا باران نیاید و زمین خیس نشود هم موضوع روشن است اما بحث بر سر آن است که چرا حالتی که باران نیامده است ولی زمین خیس است ارزش $p\Rightarrow q$ درست تلقی می شود. آیا در صورتی که چنین وضعیتی اتفاق افتد مثال نقضی برای گزاره ی شرطی ما محقق شده است؟ به تفاوت بین دو جمله زیر دقت کنید:

اگر باران بیاید آنگاه زمین خیس میشود.

فقط اگر باران بیاید زمین خیس می شود.

واضح است که اگر جمله دوم را گفته باشیم، باران نیامده باشد و زمین خیس باشد آنگاه می توان به جمله ی ما ایراد گرفت.

تذکر: گاهی اوقات برای تاکید بیشتر ، در یک ترکیب عطفی که گزاره ی دوم آن به شکلی ناخواسته صورت گرفته است، به جای "**و**" می گوییم "ولی". مثلاً می گوییم من درس خواندم ولی قبول نشدم.

قواعد تسویر

فرمول می تواند شامل سور نیز باشند. اما طبق چه قواعدی می توانیم سورها را در فرمول های خود وارد کنیم؟ این قوانین را قواعد تسویر می نامیم .

با استفاده از قواعد تسویرمی توانیم گزارهای زبان معمولی خود را نیز با استفاده از این سورها با استفاده از خاصیت ها به صورت نمادین مطرح کنیم.

مثلاً گزاره ی"هر گردویی گرد است" را در نظر بگیرید اگر Fخاصیت گردو بودن و Gخاصیت گرد بودن باشد آنگاه این گزاره را می توان به این صورت بیان کرد که" هر چیزی اگر خاصیت Fداشته باشند آنگاه خاصیت Gدارد" و یا به عبارت دیگر $\forall x(F(x)\Rightarrow G(x))$

بدین ترتیب گزاره ی "هر گردی گردو نیست" را نیز می توان به شکل سوری بیان کرد. توجه کنید که دربیان گزاره ی اخیر ابهام وجود دارد و درک درست این جمله به نوع خواندن آن بستگی دارد. در حقیقت بیان منطقی دقیق این گزارش به صورت "چنین نیست که هر گردی گردو است "می باشد و بیان صوری آن

$$\sim\forall x(G(x)\Rightarrow F(x))$$

مثال : بیت

هر آنکه جانب اهل خدا نگه دارد خدا در همه حال از بلا نگه دارد

را در نظر بگیرید. می خواهیم این بیت را به صورت نمادین بنویسیم.

فرض کنید F خاصیت انسان بودن باشد، Gخاصیت جانب اهل خدا را نگه داشتن، H حالت بودن و $K(x,y)$ به این معنا باشد که خدا شخص x را در حالت y از بلا نگه می دارد. گرچه به صورت شرطی نیست اما کلی بودن آن ایجاب می کند که آن را شرطی ببینیم. پس می توان به صورت ساده تر گفت که هر چیزی، اگر انسان باشد و جانب اهل خدا را نگه دارد، انگاه خدا آن چیز را در همه حالت از بلا نگه می دارد. بنابراین می توان نوشت

$$\forall x((F(x)\wedge G(x))\Rightarrow\forall y\left(H(y)\Rightarrow K(x,y)\right))$$

چون خدا اسم خاص است نیازی به نام گذاری آن نیست.

مثال: عبارت

اگر همه شب شب قدر بودی، شب قدر را دگر قدری نبودی

را در نظر بگیرید. دقت کنید که در این عبارت کلمه ی قدر به دو معنی متفاوت آمده است، یکی به معنای اسم خواص شب قدر و دیگری به معنای ارزش داشتن. فرض کنید Fخاصیت شب بودن، aاسم خاص شب قدر و G خاصیت قدر داشتن باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$\forall x(F(x) \Rightarrow x = a) \Rightarrow \sim G(a))$$

مثال: به عنوان یک عبارت ریاضی تعریف $\lim_{x\to a} f(x) = l$ را برای تابعی
مانند $f: X \to Y$ به صورت نمادی می نویسیم.

$$\forall \varepsilon \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta \left(\delta > 0 \wedge \forall x \left(x \in X \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)\right)\right).$$

توجه کنید که a اسم خاص است اما اگر بخواهیم بگوییم که تابع $f: X \to Y$ در
هرنقطه مانند a حد دارد باید آن را به صورت

$$\forall a (a \in X \Rightarrow \exists l\ (l \in Y \wedge$$
$$\forall \varepsilon \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \quad \exists \delta \left(\delta > 0 \wedge \forall x \left(x \in X \wedge 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)\right)\right))).$$

توجه کنید که طبق دستور نگارشی که در اینجا بحث می کنیم مثلا نوشتن $\forall a \in X$ جایز نیست و باید به همین شکلی که در اینجا آورده شده است نوشته شود.

یکی از مهمترین مسائل در زمینه قواعد تسویر ترتیب سورهای به کار رفته در یک عبارت است . مثال زیر موضوع را روشن می سازد.

مثال: فرض کنید دامنه ی متغیرهای گزاره نمای $p(x,y)$ اعداد صحیح باشند و گزاره نمای $x+y=17$ باشد. گزاره ی

$$\forall x \exists y\, p(x,y)$$

می گوید که" برای هر عدد صحیح x ، عدد y وجود دارد به قسمی که $x+y=17$". این گزاره درست است زیرا کافیست $y=17-x$ در نظر بگیریم.

گزاره ی

$$\exists y \forall x\, p(x, y)$$

این گزاره چنین خوانده می شود که " عدد صحیح yی وجود دارد به قسمی که برای همه ی اعداد صحیح x، $x + y = 17$". این گزاره قطعاً نادرست است.

مثال: گزاره نماهای $r(x)$ و $s(x)$ با روابط زیر داده شده اند:

$$r(x) = 2x + 1 = 5$$

$$s(x):\ x^2 = 9$$

براحتی می توان دید که حکم $\exists x[r(x) \wedge s(x)]$ نادرست است

، زیرا عدد صحیح a وجود ندارد بطوری که $2a+1=5$، و $a^2=9$. اما عدد صحیح $b(=2)$ موجود است بقسمی که $c^2=9$. بنابراین گزاره ی
$\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)$

در نتیجه سور وجودی $\exists x$ نسبت به ادات منطقی $\wedge$ توزیعی نیست.یعنی

$$\exists x\,[r(x) \wedge s(x)] \nLeftrightarrow [\exists x\, r(x) \wedge \exists x\, s(x)]$$

نقیض سازی

مثال:

به بیت

هر آنکه جانب اهل خدا نگه دارد   خدا در همه حال از بلا نگه دارد

بر می گردیم . می خواهیم بیت مذکور را نقیض کنیم و مجدداً به فارسی بنویسیم.

$$
\begin{aligned}
&\sim \forall x((F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \forall y(H(y) \Rightarrow K(x,y))) \\
&\equiv \exists x \sim ((F(x) \wedge G(x)) \Rightarrow \forall y(H(y) \Rightarrow K(x,y))) \\
&\equiv \exists x((F(x) \wedge G(x)) \wedge \sim \forall y(H(y) \Rightarrow K(x,y))) \\
&\equiv \exists x((F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists y \sim (H(y) \Rightarrow K(x,y))) \\
&\equiv \exists x((F(x) \wedge G(x)) \wedge \exists y(H(y) \wedge \sim K(x,y))).
\end{aligned}
$$

بنابراین می توان نقیض عبارت را به این صورت بیان کرد که" کسی هست که جانب اهل خدا را نگه داشته است ولی حالتی وجود دارد که خدا در آن حالت او را از بلا نگه نداشته است".

در ادامه به بیت

اگر همه شب شب قدر بودی   شب قدر را دگر قدری نبودی

بر می گردیم. نقیض آن را بدست می آوریم:

$$\sim (\forall x(F(x) \Rightarrow x = a) \Rightarrow \sim G(a))$$

$$\equiv (\forall x(F(x) \Rightarrow x = a) \wedge \sim\sim G(a))$$

$$\equiv (\forall x(F(x) \Rightarrow x = a) \wedge G(a)).$$

بنابراین نقیض عبارت را می توان به این صورت بیان کرد که "همه ی شب ها شب قدر هستند ولی شب قدر ارزش دارد".

قوانین استنتاج

۱) قانون انتزاع : اگر یک گزاره‌ی شرطی درست و مقدم آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم تالی آن نیز

درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

یا

$$(p \Rightarrow q) \wedge q \mapsto q$$

۲) قانون نقیض انتزاع : اگر یک گزاره شرطی درست و نقیض تالی آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم نقیض مقدم نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{c} \sim q \Rightarrow \sim p \\ \underline{\quad p \quad\quad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

یا

$$(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge q \mapsto q$$

۳) قانون رفع مولفه : اگر ترکیب فصلی دو گزاره درست و نقیض یکی از مولفه های آن نیز درست باشد، نتیجه می گیریم مولفه ی دیگر آن نیز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{l} \sim p \vee q \\ \underline{\;p\qquad\quad} \\ \therefore\ \ q \end{array}$$

یا

$$(\sim p \vee q) \wedge q \mapsto q$$

۴) قانون قیاس: اگر گزاره های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow r$ درست باشند، گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow r$ نیـز درست است. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore \; p \Rightarrow r \end{array}$$

یا

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \mapsto (p \Rightarrow r)$$

۵) قانون ادخال فاصل : از هر گزاره ای می توان از ترکیب فصلی آن را با گزاره های دیگر نتیجه بگیریم.

. به عبارت دیگر

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

یا

$$p \mapsto p \vee q$$

زیرا اگر p درست باشد، ترکیب فصلی آن با هر گزاره ی دلخواه نیز درست است.

۶) قانون حذف عاطف : از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می توانیم هر یک از آنها را نتیجه بگیـریم. بـه عبارت دیگر

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

یا

$$(p \wedge q) \mapsto p$$

زیرا اگر $p \wedge q$ درست باشد، هر دو مولفه‌ی آن درست است.

با تشکر از حسن توجه همکاران گرامی