۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\quad$ $\mathrm{I})\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\quad$ $\mathrm{II})\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به + $\quad$ $\mathrm{III})\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

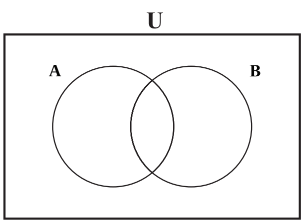
توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

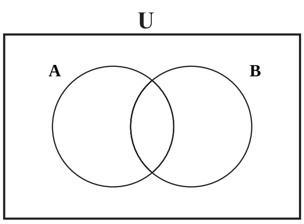
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

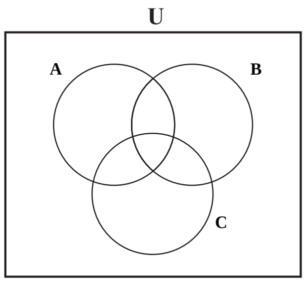


$A\cup B$

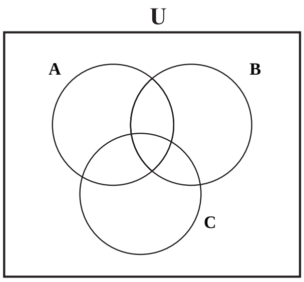


$B\cup A$

ب)

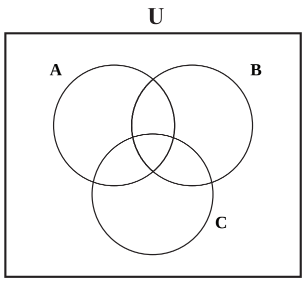


$A\cup(B\cup C)$

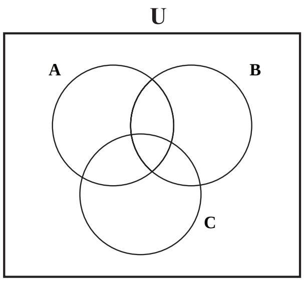


$(A\cup B)\cup C$

ج)

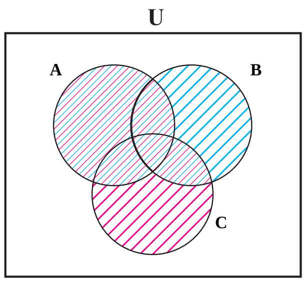


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

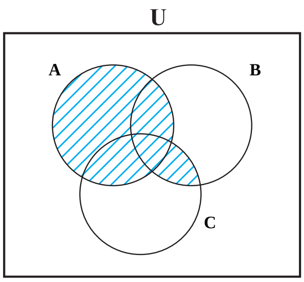


$A\cap(B\cup C)$

د)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cup(B\cap C)$

۲ با فرض اینکه U={۱,۲,۳,۴,۵,۶} و A ={۱,۲,۳} و B={۳,۴,۵} و C={۱,۲,۵,۶} در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای $\cup$ و $\cap$ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$(A\cup B)=(B\cup A)$

$(A\cup B)=\{x\in U|\ x\in A \vee \dots\}$ تعریف اجتماع

$(B\cup A)=\{x\in U|\ x\in B \vee \dots\}$ جابه‌جایی $\vee$ تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U|\ \dots \vee x\in(B\cup C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in A \vee (x\in B \vee \dots\dots)\}$ تعریف اجتماع

$=\{X\in U|(\dots\dots \vee X\in B)\vee X\in C\}$ شرکت‌پذیری $\vee$

$=\{x\in U|x\in(\dots\dots)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$]

$[x\in A \vee (x\in\dots]$ تعریف اجتماع

$[(x\in A \vee (x\in B \wedge x\in\dots)]$ تعریف اشتراک

$[x\in A \vee\dots)\wedge(\dots\dots\vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$

$[x\in \dots\dots \wedge x\in\dots\dots]$ تعریف $\cup$

$x\in[(A\cup B)\cap\dots\dots]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq \dots\dots$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\dots\dots\subseteq(A\cup B)\cap(B\cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که عکس خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\quad U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است).

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap(A\cup B')$

$=A\cup(B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

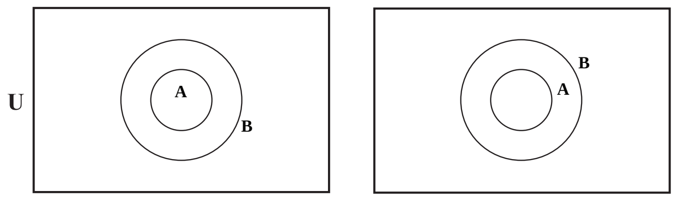
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$ $(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب، قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$، رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

(۲)

$B\subseteq B$:می‌دانیم
$A\subseteq B$:طبق فرض
$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow (A\cup B)\subseteq B$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A\cup B)=B$

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم:

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A\cap B)\subseteq A$

(۲) می‌دانیم: $A\subseteq A$ و طبق فرض: $A\subseteq B$ $\Rightarrow (A\cap A)\subseteq(A\quad B)\Rightarrow A\subseteq(A\cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A\cap B)=A$

حال فرض می‌کنیم $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم: $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

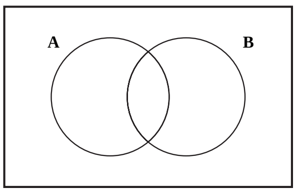
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم‌پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

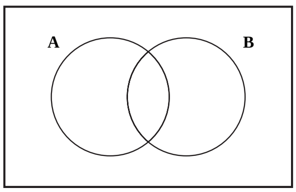
الف) $A\cup(A\cap B)=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:

U


$A\cup(A\cap B)$



U
$A\cap(A\cup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq A\xrightarrow{\text{قضیه}} A\cup(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B)\xrightarrow{\text{قضیه}} A\cap(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(\ldots\ldots)$ فاکتورگیری

$=A\cap\ldots\ldots=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\ldots\ldots)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\ldots\ldots\ldots)$ فاکتورگیری

$=A\cup\ldots\ldots\ldots=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap\ldots\ldots}_{\text{جذب}}]$$

$$=\underbrace{(A\cap B)\cup\ldots\ldots}_{\text{جذب}}=\ldots\ldots$$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=\underbrace{(A\cup B')}_{C}\cap[\underbrace{(B\cap C)}_{D}\cup\underbrace{(A\cup B')}_{C}]$$ جابه‌جایی

$$=\underbrace{(A\cup B')}_{C}$$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $$\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\ldots\ldots\ldots \qquad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$	$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$
تبدیل اشتراک به تفاضل	$=(A-C)\cup(B-C)$

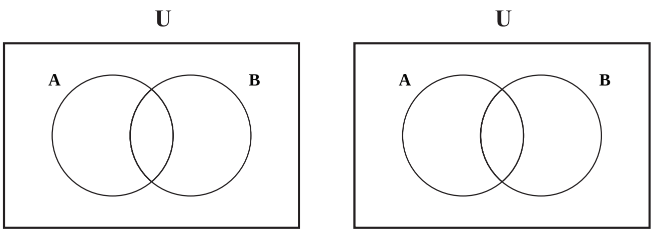
ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

شرکت‌پذیری اجتماع	$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$
تبدیل تفاضل به اشتراک	$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$
عکس عمل توزیع‌پذیری	$=[A\cap(\ldots\ldots\cup\ldots\ldots)]\cup(B\cap A')$
تعریف متمم	$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$
تعریف مرجع	$=A\cup(B\cap A')$
توزیع‌پذیری	$=(A\cup\ldots\ldots)\ \ldots\ldots\ (A\cup\ldots\ldots)$
تعریف متمم	$=(A\cup B)\cap U$
تعریف مرجع	$=A\cup B$

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۲ اگر فرض کنیم $U=\{1, 2, \ldots, 10\}$ و $A=\{2,3,5,8\}$ و $B=\{3,4,6,8\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند :

$$\begin{cases} \text{الف)}\ (A\cup B)'=(A'\cap B') \\ \text{ب)}\ (A\cap B)'=(A'\cup B') \end{cases}$$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$[x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow \ldots\ldots\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge\ldots\ldots\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

مثال : با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$

ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل :

الف) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ — تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$ — شرکت‌پذیری

$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$ — جابه‌جایی

$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$ — ....

$=(A\cap B')\cap C'$ — $A\cap A=A$

$=A\cap(B'\cap C')$ — شرکت‌پذیری

$=A-(B'\cap C')'$ — تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B\cup C)$ — قانون ....

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ — تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A\cap B)\cap(A'\quad C')$ — قانون دمورگان

$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ — توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ — قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ — تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم :

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,........,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=..............$

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \quad \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup(A\cup B)= \ldots\ldots \cup(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} \ldots\ldots \subseteq \ldots\ldots \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow A=B$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B \Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

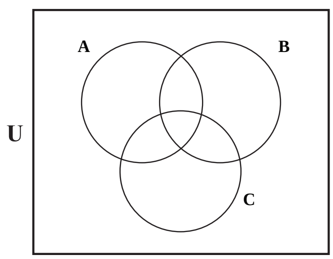
۱ اگر $A=\{$۱ و ۲ و ... و ۱۰$\}$ و $B=\{$۵ و ۶ و ... و ۱۵$\}$ و $U=\{$۱ و ۲ و ... و ۲۰$\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

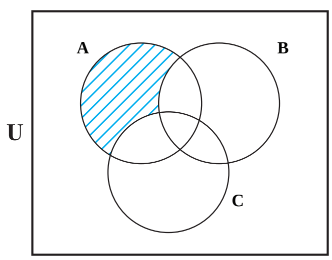
ب) $(A-B)\cup\big((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A']\big)$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.

پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\quad C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک ازعبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)\Rightarrow B=C$