# ۲ احتمال غیر هم‌شانس

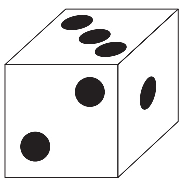

نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد. مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس مشاهده هرکدام از اعداد با یکدیگر برابر هستند ولی در مسابقه‌های گروهی، شانس قهرمانی تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام‌جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شانس قهرمانی تیم‌ها به‌صورت زیر مشخص شده بود :

| تیم | برزیل | آرژانتین | آلمانی | اسپانیا | بلژیک | فرانسه | کلمبیا | هلند | بقیه تیم‌ها |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| احتمال قهرمانی | ۰/۲۵ | ۰/۱۸۱ | ۰/۱۶۶ | ۰/۱۲۵ | ۰/۰۶۶ | ۰/۰۴۷ | ۰/۰۴۳ | ۰/۰۴۳ | ۰/۰۷۹ |

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحله نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول بالا بودند.
دنیای پیرامون ما سرشار از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به‌نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

## فعالیت

در یک مکعب، روی سه وجه آن عدد ۱ نوشته شده است. همچنین عدد ۲ روی دو وجه و عدد ۳ روی وجه باقی مانده قرار گرفته است. اگر این مکعب به هوا پرتاب شود،



۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S = \{\ldots, \ldots, \ldots\}$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این مکعب قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به‌دست آورید.

$$A=\{۱\} \Rightarrow P(A)=\frac{\dots}{\dots}$$

آیا می‌توانید از رابطه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به‌جای، $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از مکعب که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده‌اند، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ را به‌دست آورید.

$$P(۱)=\frac{\dots}{\dots} \quad , \quad P(۲)=\frac{\dots}{\dots}$$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)=\dots+\dots+\dots=\dots$$

۶ اگر $D=\{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱)+P(۲)$ مقایسه کنید. همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرار هستند :

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱, a_۲, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم :

۱ $۰ \leq P(A) \leq ۱$

۲ $P(S)=۱$

۳ $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+\dots+P(a_k)$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه زیر را بگیریم :

$$P(S)=P(a_۱)+P(a_۲)+\dots+P(a_n)=۱$$

**مثال :** در یک مسابقه چهارجانبه فوتبال، تیم‌های c, b, a و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های b, a و c با

یکدیگر برابر باشند ولی احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر هریک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال قهرمانی تیم a، x باشد، یعنی $P(a) = x$. از آنجایی که شانس قهرمانی تیم‌های b, a و c برابرند، پس $P(b) = P(c) = x$ از سوی دیگر احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس $P(d) = ۲P(a) = ۲x$. با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله $S = \{a, b, c, d\}$ است، بنابراین

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱$$

با جای‌گذاری احتمال‌های بالا برحسب x، به تساوی $x + x + x + ۲x = ۱$ می‌رسیم. پس $۵x = ۱$ و در نتیجه $x = \frac{۱}{۵}$. بنابراین احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها عبارت است از $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{۱}{۵}$ و $P(d) = \frac{۲}{۵}$.

## کار در کلاس

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\}) = \frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\}) = \frac{۱}{۲}$، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه y, x و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند، بنابراین $P(x) + P(y) + P(z) = ۱$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x, y\}) = \frac{۲}{۳}$، پس $P(x) + P(y) = \frac{۲}{۳}$، بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z) = \frac{\dots}{\dots}$.

از سوی دیگر، $P(\{x, z\}) = \frac{۱}{۲}$، پس $P(x) + P(z) = \frac{۱}{۲}$. از قراردادن $P(z) = \frac{۱}{۳}$ در این تساوی $P(x) = \frac{\dots}{\dots}$ به‌دست می‌آید.

اکنون این مقدار را در تساوی $P(x) + P(y) = \frac{۲}{۳}$ قرار دهید و مقدار $P(y)$ را به‌دست آورید : $P(y) = \frac{\dots}{\dots}$.

۲ یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

در این سؤال، $P(a) = ۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱) = P(۳) = \dots$ و همچنین $P(۲) = P(۴) = \dots$. (چرا؟) بنابراین اگر $P(۱) = r$، سپس $P(۲) = ۳r$. از رابطه زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده برحسب r، مقدار r را به‌دست آورید.

$$P(S) = ۱ \Rightarrow P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$
$$\Rightarrow r + ۳r + \dots + \dots + \dots + \dots = ۱$$
$$\Rightarrow r = \dots$$

اکنون با محاسبه $P(۲)$ و $P(۳)$ می‌توانید $P(\{۲, ۳\})$ را تعیین کنید.

$$P(\{۲, ۳\}) = \dots + \dots = \dots$$

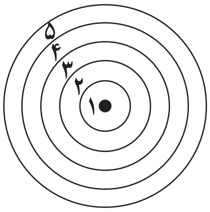
## تمرین

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، شانس آمدن «رو» نصف شانس آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

۳ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ , $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A) = \frac{۲}{۷}$ و $P(B) = \frac{۳}{۵}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

۴ در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.




۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق زیر که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[1]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، $r$ باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه $k$ ام، $(۲k - ۱)r$ باشد،

۱ــ احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

۲ــ احتمال اصابت دارت به سه ناحیه اول، سوم و چهارم بیشتر است یا اصابت به دو ناحیه دوم و پنجم؟

---

۱ــ مرز بیرونی هر ناحیه را جزء آن ناحیه محسوب کنید.